

I numeri infiniti e infinitesimi per gli studenti dei licei.

VERSIONE PRELIMINARE

Vieri Benci

June 3, 2024

Contents

1	Insiemi numerici	3
1.1	Il numero alfa e le numerosità	3
1.2	Approfondimento sulla teoria delle numerosita'	4
1.3	I numeri α -razionali	6
1.4	Infiniti e infinitesimi	7
1.5	Parte standard di un numero α -razionale	8
2	La retta euclidea e le grandezze	9
2.1	Il continuo	9
2.2	Modelli della retta euclidea	9
2.2.1	La retta empirica	9
2.2.2	La retta razionale	9
2.2.3	La retta α -razionale	10
2.2.4	La retta euclidea	10
2.3	Approfondimento sui sistemi assiomatico-deduttivi	13
2.4	I numeri reali	13
2.5	Approfondimento sulla nozione di continuo	15
3	Funzioni reali e funzioni euclidee	15
3.1	Funzioni euclidee	16
3.2	La retta tangente	17
3.3	La nozione di velocita' istantanea	18
3.4	Calcolo dell'angolo di contingenza	20
4	La funzione esponenziale	21
4.1	Definizione	21
4.2	Il numero di Nepero	22

5	Il calcolo infinitesimale	22
5.1	Limiti	23
5.2	Insiemi iperfiniti	23
5.3	Continuità'	25
5.3.1	Il teorema di Weierstrass	25
5.4	Derivate	26
5.4.1	Il teorema di Lagrange	27
5.5	Il differenziale	28
5.6	Integrali	29
5.6.1	Il teorema fondamentale del calcolo	30
5.6.2	Il teorema della primitiva	31
5.7	Serie	31
6	Considerazioni conclusive	32

INTRODUZIONE

Negli ultimi anni ci sono stati alcuni tentativi di insegnamento dell'Analisi Non Standard nelle scuole superiori (vedi e.g. [5],[7]). La maggiore rilevanza dell'uso dei numeri infinitesimi nasce dal calcolo infinitesimale. Dal punto di vista didattico questo significa che i numeri infiniti ed infinitesimi vengono introdotti durante l'ultimo(i) anno(i) delle scuole superiori. Forse però sarebbe auspicabile, introdurre i numeri infinitesimi prima, senza dover necessariamente seguire lo sviluppo culturale che hanno avuto i docenti. Infatti ci sono molti aspetti dei numeri infiniti ed infinitesimi estremamente interessanti che possono essere sviluppati anche prima del calcolo infinitesimale e addirittura prima dei numeri reali. Tra le motivazioni che suggeriscono l'introduzione dei numeri infiniti e infinitesimi nelle scuole superiori fino dai primi anni possiamo elencare le seguenti:

- 1 - L'argomento è affascinante e potrebbe stimolare l'interesse verso la matematica;
- 2 - esistono alcune applicazioni della matematica non archimedeica al di fuori del calcolo infinitesimale che possono essere fatte e capite con strumenti relativamente elementari nei primi anni delle superiori, per esempio nel calcolo delle probabilità (vedi e.g. [1], [2], [4]);
- 3 - la capacità di manipolare gli infinitesimi semplifichera' e potenzierà la comprensione e le tecniche del calcolo differenziale ;
- 4 - l'uso dei numeri infiniti e infinitesimi, facilita lo sviluppo delle capacità di astrazione dello studente.

Ho organizzato questo articolo in cinque paragrafi, ognuno collegato al corrispondente anno scolastico del vecchio programma ministeriale relativo al Liceo Scientifico. Inoltre ho aggiunto alcuni sottoparagrafi di approfondimento che non sono necessari per lo sviluppo della materia, ma sono utili dal punto di vista epistemologico e culturale. Lo stesso dicasi per alcune osservazioni complementari.

1 Insiemi numerici

In 1° Liceo si prevede la definizione degli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ed un cenno ai numeri reali. Si potrebbero introdurre anche altri insiemi numerici quali l'insieme dei numeri α -naturali che contengono numeri infiniti ed i numeri α -razionali che includono numeri infinitesimi. Peraltro i numeri α -razionali stimolano utili esercizi sui polinomi.

1.1 Il numero alfa e le numerosità

Ad ogni insieme finito si può associare un numero naturale: il numero dei suoi elementi ovvero la sua **numerosità**.¹ Dunque possiamo generalizzare questa idea ed associare una numerosità anche agli insiemi infiniti, o almeno ad alcuni di essi. Per esempio, possiamo associare all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali un numero che battezziamo α . Abbiamo bisogno di un nuovo nome e di un nuovo simbolo poichè nessun numero naturale è così grande da poter rappresentare la *numerosità* di $\mathbb{N}$. In simboli

$$\alpha = \text{num}(\mathbb{N}).$$

Se esistono numeri infiniti, come possiamo rappresentare tutti questi numeri? Una importante classe di numeri può essere rappresentata da espressioni contenenti il simbolo α che rappresentano le numerosita' di alcuni insiemi particolari.

Per esempio possiamo definire le seguenti numerosita':

- $\alpha - 1 = \text{num}(\{2, 3, 4, \dots\})$
- $\alpha - n$ e' la numerosita' di $\mathbb{N}$ a cui si sono tolti n elementi;
- $\alpha + n$ e' la numerosita' di $\mathbb{N}$ a cui si e' aggiunto un insieme disgiunto di n elementi;
- $n\alpha$ e' la numerosita' dell'unione di n insiemi disgiunti la cui numerosita' e' α , per esempio la numerosita' dell'insieme che contiene i seguenti elementi:

$$\begin{array}{ccccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & \dots \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & \dots \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n, 1) & (n, 2) & (n, 3) & (n, 4) & \dots \end{array}$$

- α^2 e' la numerosita' di $\mathbb{N}^2$ ovvero di tutte coppie di numeri naturali
- α^n e' la numerosita' di $\mathbb{N}^n$ ovvero delle n -ple coppie di numeri naturali

¹Una presentazione divertente della teoria delle numerosità si trova in [6]; per chi volesse approfondire l'argomento può vedere [3].

In conclusione possiamo asserire che dato un polinomio a coefficienti interi

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n > 0$$

l'espressione $P(\alpha)$ rappresenta la numerosita' di un insieme infinito costruito mediante le regole che abbiamo descritto.

L'insieme dei numeri della forma $P(\alpha)$ sara' chiamato insieme dei numeri α -naturali. I numeri α -naturali possono essere ordinati nel seguente modo:

Definizione 1 Se $\xi = P(\alpha)$, e $\zeta = Q(\alpha)$ direma che $\xi > \zeta$ se esiste un numero x_0 tale che per ogni $x \geq x_0$,

$$P(x) > Q(x)$$

Dunque, dato un numero α -razionale $P(\alpha) = a_n \alpha^n + \dots + a_0$, si ha che $P(\alpha) > 0$ se e solo se $a_n > 0$. E' facile verificare che $\xi > \zeta$ se e solo se $\xi - \zeta > 0$.

1.2 Approfondimento sulla teoria delle numerosita'

Pur senza voler analizzare criticamente la nozione di numero, possiamo descrivere, almeno sommariamente, un modo di operare con i numeri finiti nella descrizione della realta' ed estendere ciò ai numeri infiniti. Dato un qualunque insieme A , denoteremo con $\mathbf{n}(A)$ il numero di elementi contenuti in A . Per esempio abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\{\text{vaghe stelle dell'Orsa}\}) &= 7 \\ \mathbf{n}(\{\text{cavalieri dell'Apocalisse}\}) &= 4 \end{aligned}$$

Anche senza esaminare il significato ontologico della nozione di numero, possiamo dare delle regole generali riguardo ai numeri. Più in particolare discuteremo due principi che sembrano radicati alla nostra idea di numero e all'operazione del contare.

- **Principio di Hume** (o di Cantor) - Il numero degli elementi di F è uguale al numero degli elementi di G se tra F e G vi è una corrispondenza biunivoca.

Per esempio si ha che

$$\mathbf{n}(\{\text{cavalieri dell'Apocalisse}\}) = \mathbf{n}(\{\text{punti cardinali}\})$$

Infatti si ha la seguente corrispondenza biunivoca:

Pestilenza	$\longleftrightarrow$	Est
Guerra	$\longleftrightarrow$	Sud
Carestia	$\longleftrightarrow$	Ovest
Morte	$\longleftrightarrow$	Nord

Il numero 4, infatti, potrebbe essere definito come quell'ente che accomuna tutti gli insiemi che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con l'insieme {cavalieri dell'Apocalisse}.

Ma i numeri relativi agli insiemi finiti soddisfano anche un'altro principio fondamentale che chiameremo principio di Euclide.

- **Principio di Euclide** - (*V assioma*) *L'intero è maggiore della parte ovvero, dati due insiemi A e B tali che A sia una parte propria di B, allora*

$$n(A) < n(B). \quad (1)$$

Per esempio si possono considerare gli insiemi

$$\begin{aligned} B &= \{\text{insieme dei numeri scritti sulle facce di un dado}\} \\ A &= \{\text{insieme dei numeri pari scritti sulle facce di un dado}\} \end{aligned}$$

In questo caso vale la disuguaglianza (1) che si riduce al semplice fatto che $3 < 6$.

E' tutto chiaro? In effetti è tutto molto semplice finché ragioniamo con insiemi finiti, ma le cose si complicano se passiamo ad insiemi infiniti. Questi due principi, nonostante che appaiono naturali, sono contraddittori. Galileo è uno dei tanti che ha messo in evidenza questa contraddizione. Vediamo come: si ponga

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{\text{insieme dei numeri naturali}\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \\ P &= \{\text{insieme dei numeri pari}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \end{aligned}$$

1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
4	$\longleftrightarrow$	8
5	$\longleftrightarrow$	10
...	$\longleftrightarrow$	...

Tab. 1.1

I numeri pari sono solo una parte di tutti i numeri, ma possono essere posti in corrispondenza biunivoca con la totalità dei numeri interi (vedi Tabella 1.1).

Dunque, se vogliamo definire una sistema numerico che include i numeri infiniti dobbiamo abolire almeno uno dei due principi. Se aboliamo il Principio di Euclide si ottengono i numeri cardinali la cui teoria è stata sviluppata da Cantor alla fine del XIX secolo. Se invece rinunciamo al principio di Hume si ottengono le numerosità che sono numeri strettamente collegata all'Analisi non Standard (ANS) che è stata introdotta e sviluppata da Robinson nella seconda metà del secolo scorso.

1.3 I numeri α -razionali

Un numero razionale $\neq 0$, puo' essere definito in modo sbrigativo come il rapporto di due numeri naturali preceduti da un segno, ovvero

$$q = \pm \frac{n}{m}, \quad m \neq 0.$$

I numeri razionali possiedono due operazioni $+$ e $\cdot$ (e le loro inverse $-$ e $:$) che soddisfano le usuali proprieta' dell'algebra e la relazione d'ordine lineare $\leq$ coerente con esse.

Similmente, si possono definire i numeri α -razionali. Un numero α -razionale, puo' essere definito mediante il rapporto di due numeri α -naturali, ovvero

$$\xi = \pm \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$$

ove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi a coefficienti interi, $Q(x) \neq 0$.

Grazie agli algoritmi che permettono le operazioni tra polinomi si possono eseguire le quattro operazioni tra i numeri α -razionali. Dato un numero α -razionale $\xi = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$, mediante la divisione tra polinomi, il numero ξ puo' essere scritto nel seguente modo che in molte circostanze risulta utile:

$$\xi = S(\alpha) + \frac{R(\alpha)}{Q(\alpha)} = a_p \alpha^p + a_{p-1} \alpha^{p-1} + \dots + a_0 + \frac{R(\alpha)}{Q(\alpha)} \quad (2)$$

ove $S(\alpha)$ e' un polinomio a coefficienti razionali e $R(\alpha)$ e' un polinomio di grado minore del grado di Q .

Esempio:

$$\frac{12\alpha^4 - 2\alpha^2}{6\alpha^2 + \alpha} = 2\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha - \frac{5}{18} + \frac{5\alpha}{108\alpha^2 + 18\alpha}$$

Similmente ai numeri razionale anche i numeri α -razionali hanno una relazione d'ordine: si ha che $\xi = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} > 0$ se $P(\alpha)$ e $Q(\alpha)$ sono numeri α -naturali (ovvero i due coefficienti corrispondenti ai monomi di grado massimo sono positivi). Inoltre si ha che $\xi > \zeta$ se $\xi - \zeta > 0$.

Talvolta risulta utile usare il simbolo η per denotare l'inverso di α , ovvero

$$\eta := \frac{1}{\alpha}$$

Il numero η sara' chiamato infinitesimo fondamentale. Per esempio il numero $\frac{12\alpha^4 - 2\alpha^2}{6\alpha^2 + \alpha}$ puo' essere scritto utilizzando η nel seguente modo:

$$\frac{3\alpha^3 - 2\alpha^2}{6\alpha^5 + \alpha + 2} = \frac{\eta^5 (3\alpha^3 - 2\alpha^2)}{\eta^5 (6\alpha^5 + \alpha + 2)} = \frac{3\eta^2 - 2\eta^3}{6 + \eta^4 + 2\eta^5} = \eta^2 \frac{3 - 2\eta}{6 + \eta^4 + 2\eta^5}$$

1.4 Infiniti e infinitesimi

Adesso risulta utile la seguente classificazione dei numeri α -razionali.

Definizione 2 Un numero α -razionale x si dice **infinito** (o **illimitato**) se comunque si scelga un numero naturale k

$$|x| > k.$$

Un numero si dice **finito** (o **limitato**) se non è infinito, ovvero se esiste un numero naturale k tale che

$$|x| < k.$$

Un numero α -razionale si dice **infinitesimo** se per ogni numero naturale k

$$|x| < \frac{1}{k}.$$

Se un numero x viene rappresentato nel seguente modo

$$x = S(\alpha) + \frac{R(\alpha)}{Q(\alpha)}$$

allora

- x è infinito se $S(\alpha)$ è un polinomio di grado ≥ 1 ,
- x è finito se $S(\alpha)$ è un polinomio di grado 0, ovvero è un numero razionale $\neq 0$,
- x è infinitesimo se $S(\alpha) = 0$.

Per esempio è facile verificare che i numeri

$$7\alpha, \frac{\alpha+1}{3} = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{3}, \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + 1}{\alpha + 1} = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha + 1}$$

sono infiniti. Similmente possiamo verificare che i numeri $\frac{7}{\alpha-8}$, $\frac{5\alpha}{8\alpha^4 - \alpha^3 + 1}$ etc. sono infinitesimi.

Vediamo adesso un'altra definizione:

Definizione 3 Due numeri α -razionali ξ ed ζ si dicono infinitamente vicini se $\xi - \zeta$ è un infinitesimo. Se ξ ed ζ sono infinitamente vicini scriveremo

$$\xi \sim \zeta$$

Dunque per verificare che due numeri α -razionali sono infinitamente vicini dobbiamo eseguire la sottrazione tra polinomi. Per esempio il numero 7 è infinitamente vicino al numero $\frac{7\alpha}{1+\alpha}$ in quanto

$$7 - \frac{7\alpha}{\alpha+1} = \frac{7 + 7\alpha - 7\alpha}{\alpha+1} = \frac{7}{\alpha+1} \sim 0$$

Teorema 4 La relazione " $\sim$ " soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) Se $\xi \sim \xi$ (proprietà riflessiva).
- (ii) Se $\xi \sim \zeta$ allora $\zeta \sim \xi$ (proprietà simmetrica).
- (iii) Se $\xi \sim \zeta$ e $\zeta \sim \vartheta$, allora $\xi \sim \vartheta$ (proprietà transitiva).

1.5 Parte standard di un numero α -razionale

Dato un numero α -razionale scritto nella forma

$$\xi = S(\alpha) + \frac{R(\alpha)}{Q(\alpha)} = a_p \alpha^p + a_{p-1} \alpha^{p-1} + \dots + a_0 + \frac{R(\alpha)}{Q(\alpha)}; \quad gr(R) < gr(Q).$$

- $a_p \alpha^p + a_{p-1} \alpha^{p-1} + \dots + a_1 \alpha$ si chiama parte infinita di ξ ,
- a_0 si chiama parte finita di ξ ,
- $\frac{R(\alpha)}{Q(\alpha)}$ si chiama parte infinitesima di ξ .

Osservazione 5 Se usiamo il simbolo $\eta = \alpha^{-1}$, possiamo esprimere la "parte infinitesima" di un numero in modo piu' espressivo come dimostrano i seguenti esempi:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \frac{1}{\alpha + 1} &= \alpha^2 + \frac{\eta}{\eta(\alpha + 1)} = \alpha^2 + \eta \frac{1}{1 + \eta} \\ 5 + \frac{2\alpha + 4}{\alpha^3 + 1} &= 5 + \frac{\eta^3(2\alpha + 4)}{\eta^3(\alpha^3 + 1)} = 5 + \frac{2\eta^2 + 4\eta^3}{1 + \eta^3} = 5 + \eta^2 \frac{2 + 4\eta}{1 + \eta^3} \end{aligned}$$

In generale, un numero α -razionale puo' essere rappresentato nel seguente modo:

$$\xi := P(\alpha) + \eta^k \frac{A(\eta)}{B(\eta)}$$

ove $A(\eta)$ e $B(\eta)$ sono numeri limitati $\neq 0$ ovvero $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi aventi il termine di grado 0 non nullo. Il numero k si chiama ordine della parte infinitesima.

Se ξ e' un numero limitato, la parte finita viene chiamata parte standard di ξ ed e' denotata da $st(\xi)$. Se ξ e' un numero infinito si usa anche scrivere $st(\xi) = +\infty$ o $st(\xi) = -\infty$ rispettando il segno di ξ . Si osservi che $\pm\infty$ non sono numeri; sono soltanto dei comodi simboli che permettono di scrivere in formule l'enunciato "il numero ξ e' un infinito positivo (o negativo)".

La parte standard e' di fondamentale importanza per l'analisi infinitesimale, pertanto e' utile avere presenti le seguenti regole:

1. $st(st(\xi)) = st(\xi)$,
2. $st(\xi) = st(\zeta)$ se e solo se $\xi \sim \zeta$
3. $st(\xi + \zeta) = st(\xi) + st(\zeta)$
4. $st(\xi \cdot \zeta) = st(\xi) \cdot st(\zeta)$

2 La retta euclidea e le grandezze

L'argomento concettualmente più duro del secondo anno è il concetto di numero reale. Classicamente, in una scuola superiore i numeri reali vengono introdotti mediante le sezioni di Dedekind di numeri razionali ed identificati con la retta euclidea. In questo articolo, presenteremo i numeri reali basandoci sui numeri infinitesimi ed una definizione più estensiva del continuo euclideo.

2.1 Il continuo

L'idea di continuo è descritta o modellizzata dalla retta euclidea che denoteremo con $\mathbb{E}$. Il continuo non è importante solo per la geometria, ma per tutte le scienze "quantitative". Infatti le grandezze possono essere "rappresentate" da punti sulla retta euclidea (una volta scelta l'origine O ed un punto U che rappresenta l'unità). Pertanto possiamo enunciare il seguente enunciato "metamatematico":

ad ogni grandezza possiamo far corrispondere un punto della retta Euclidea

Inoltre la retta euclidea deve essere tale che si possano eseguire le opportune operazioni tra le grandezze (somme, prodotti, derivate, integrali etc.).

Chiamiamo **numeri euclidei** i numeri che corrispondono ai punti della retta euclidea e cerchiamo di definire le loro proprietà, sia per soddisfare la nostra intuizione, sia per risolvere i problemi che la natura pone all'indagine matematica.

2.2 Modelli della retta euclidea

Prima di definire la retta euclidea, vediamo i vari passi che ci portano alla sua definizione.

2.2.1 La retta empirica

La misura di ogni grandezza fisica dà sempre un numero decimale finito. D'altra parte, dato un righello, ad ogni decimale finito, possiamo far corrispondere un punto della retta euclidea. Pertanto, se denotiamo con $\mathbb{D}$ l'insieme dei decimali finiti possiamo chiederci se possiamo identificare la retta euclidea con la **retta empirica** $\mathbb{D}$. E' legittimo identificare la retta razionale con la retta empirica? Ovviamente no! Basta dividere un segmento unitario in tre parti uguali ed abbiamo che $\frac{1}{3} = 0,333333333\dots$. Ma un segmento di lunghezza $\frac{1}{3}$, che (teoricamente) può essere costruito con riga e compasso, determina un punto sulla retta euclidea, ma non sulla retta empirica.

2.2.2 La retta razionale

La retta razionale può essere identificata con l'insieme dei numeri che possono essere espressi come frazioni di numeri interi. Possiamo chiederci se la retta razionale $\mathbb{Q}$ è adeguata a rappresentare il continuo euclideo. Tra l'altro la retta razionale ha una bellissima proprietà:

*con i numeri razionali risulta possibile eseguire le quattro operazioni
sia mediante algoritmi finiti, sia usando riga e compasso.*

E' legittimo supporre

$$\text{retta euclidea} = \text{retta razionale?}$$

Ovviamente no! Ed i motivi sono (almeno) due:

1 - La retta razionale non permette di descrivere le grandezze che sono incommensurabili rispetto all'unita di misura come, per esempio, $\sqrt{2}$.

2 - La retta razionale non permette di descrivere le grandezze non-archimedee come per esempio la numerosità di $\mathbb{N}$.

Per sottolineare l'inadeguatezza dei numeri razionali nel descrivere tutte le grandezze è utile ricordare che $\sqrt{2}$, essendo la diagonale di un quadrato di lato unitario, può essere costruita con riga e compasso ed quindi, per la nostra intuizione, rappresenta legittimamente una grandezza. Lo stesso discorso si può fare per le grandezze non-archimedee. Anche se non si può "costruire direttamente" un infinitesimo con riga e compasso, si possono costruire grandezze infinitesime, come per esempio gli angoli di contingenza.

2.2.3 La retta α -razionale

Vediamo adesso se e' legittimo identificare l'insieme dei numeri α -razionali con la retta euclidea; con questi numeri possiamo denotare grandezze infinite come le numerosita' e possiamo descrivere qualunque grandezza irrazionale come $\sqrt{2}$ commettendo al piu' un errore infinitesimo. Comunque anche la retta " α -razionale" e' insoddisfacente perche' non esiste alcun numero α -razionale ξ tale che

$$\xi^2 = \sqrt{2}.$$

Ovvero anche la retta α -razionale ha dei "buchi" e questo non solo e' contrario alla nostra intuizione, ma anche molto scomodo per eseguire i calcoli e quindi anche per le applicazioni della matematica.

2.2.4 La retta euclidea

Per quanto abbiamo visto i numeri α -razionali non sono adeguati per descrivere la retta Euclidea in quanto ci sono grandezze che non possono essere rappresentate su di essa. Vediamo come possiamo ampliare ulteriormente questo insieme.

Ad ogni un numero α -razionale

$$\xi = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$$

si può associare una successione

$$\varphi(n) = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

e pensare a ξ come al valore che $\varphi(n)$ assume nel punto α . Possiamo quindi generalizzare questa idea e dare la seguente definizione:

Definizione 6 *Un numero euclideo e' una espressione del tipo*

$$\langle \varphi(n) \rangle$$

ove $\varphi(n)$ e' una successione di numeri euclidei.

Se $\varphi(n)$ e' un'espressione aritmetica che non contiene il numero α , scriveremo

$$\langle \varphi(n) \rangle = \varphi(\alpha). \quad (3)$$

Mediante questa definizione si aumenta notevolmente l'insieme dei numeri. Per esempio avremo dei nuovi numeri come

$$2^\alpha = [2^n], \quad \left[\frac{3 \cdot 3^n}{n^2 - 1} \right] = \frac{3 \cdot 3^\alpha}{\alpha^2 - 1}, \quad etc.$$

Naturalmente i numeri euclidei devono sottostare ad alcune regole che estendono le corrispondenti regole valide per i numeri α -razionali:

- **(Regola della somma)** se $\varphi(n)$ e $\psi(n)$ sono due successioni, allora $\langle \varphi(n) + \psi(n) \rangle = \langle \varphi(n) \rangle + \langle \psi(n) \rangle$,
- **(Regola del prodotto)** se $\varphi(n)$ e $\psi(n)$ sono due successioni, allora $\langle \varphi(n) \cdot \psi(n) \rangle = \langle \varphi(n) \rangle \cdot \langle \psi(n) \rangle$,
- **(Regola di equivalenza)** se $\varphi(n)$ e $\psi(n)$ sono due successioni definitivamente uguali, allora $\langle \varphi(n) \rangle = \langle \psi(n) \rangle$,
- **(Regola di permanenza del segno)** se per ogni n , $\varphi(n) > 0$, allora $\langle \varphi(n) \rangle > 0$,
- **(Regola della parte standard)** ogni numero euclideo limitato ξ ha una parte standard che soddisfa le proprieta' descritte nel paragrafo 1.5.

Queste semplici regole ci permettono di operare con i numeri euclidei con relativa facilità. Per esempio, si puo' facilmente dimostrare che

$$\frac{2^{3\alpha}}{2^\alpha} = 2^{2\alpha}$$

in quanto

$$\frac{2^{3\alpha}}{2^\alpha} = \left\langle \frac{2^{3n}}{2^n} \right\rangle = \langle 2^{2n} \rangle = 2^{2\alpha}.$$

Similmente si ha che

$$\frac{3 \cdot 3^\alpha}{\alpha^2 - 1} = \left\langle \frac{3 \cdot 3^n}{n^2 - 1} \right\rangle = \left\langle \frac{3^{n+1}}{(n+1)(n-1)} \right\rangle = \frac{3^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha-1)}$$

Si puo' anche dimostrare che 2^α e' piu' grande di ogni numero α -razionale. Infatti, dato un numero α -razionale $\xi = a_p \alpha^p + a_{p-1} \alpha^{p-1} + \dots$, posto

$$\psi(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots$$

si ha che per n sufficientemente grande

$$2^n > \psi(n)$$

e dunque

$$2^n - \psi(n) > 0$$

Pertanto, per il principio di permanenza del segno

$$\langle 2^n - \psi(n) \rangle > 0$$

e usando anche il principio della somma,

$$0 < \langle 2^n - \psi(n) \rangle = \langle 2^n \rangle - \langle \psi(n) \rangle = 2^\alpha - \xi.$$

Dunque $2^\alpha > \xi$.

Osservazione 7 Due successioni $\varphi(n)$ e $\psi(n)$ si dicono α -equivalenti se $\langle \varphi(n) \rangle = \langle \psi(n) \rangle$. Per il principio di equivalenza se due successioni sono definitivamente uguali, allora sono α -equivalenti. Però due successioni possono essere α -equivalenti anche se non sono definitivamente uguali.

Osservazione 8 Il fatto che nella formula (3), $\varphi(n)$ non debba contenere il numero α è essenziale se non si vuole incorrere in contraddizioni. Per esempio prendiamo $\varphi(n) = \alpha - 2n$; si ha che per ogni n

$$\alpha - 2n > 0,$$

ma se applichiamo erroneamente la (3), si ottiene che

$$\langle \alpha - 2n \rangle = \alpha - 2\alpha = -\alpha$$

che contraddice il principio di permanenza del segno. In realtà si ha che

$$\langle \alpha - 2n \rangle = \langle \alpha \rangle - \langle 2n \rangle = \langle \alpha \rangle - 2\alpha$$

e dunque $\langle \alpha \rangle$ è un numero euclideo maggiore di 2α in genere denotato con la notazione α^* . Dunque, si possono considerare anche espressioni contenenti α adottando la seguente notazione:

$$\langle \alpha \rangle = \alpha^*, \quad \langle \alpha^* \rangle = \alpha^{**}, \quad \langle \alpha^{**} \rangle = \alpha^{***}, \text{ etc.}$$

Per esempio, si ha che

$$\left\langle \frac{3^\alpha + 3}{\alpha^2 - 1} \right\rangle = \frac{3^{\alpha^*} + 3}{(\alpha^*)^2 - 1}, \quad \langle n\alpha \rangle = \langle n \rangle \cdot \langle \alpha \rangle = \alpha\alpha^*.$$

2.3 Approfondimento sui sistemi assiomatico-deduttivi

Le regole espone nel paragrafo precedente in realta' sono gli assiomi che definiscono il campo dei numeri euclidei. In un liceo, volendo, possono essere presentati come tali dicendo che, similmente agli assiomi degli Elementi di Euclide, possono essere considerati di per se' evidenti. In realta' nascondono alcune insidie e sarebbe necessario fare alcune osservazioni che pero' esulano dagli scopi degli attuali programmi ministeriali.

Le questioni piu' importanti che si pongono sono le seguenti:

1. Gli assiomi proposti sono coerenti?
2. Questo insieme di assiomi e' completo?

Le risposte a queste domande sono SI alla prima e NO alla seconda. Precisiamo questi fatti.

Per un teorema di Goedel sappiamo che non si puo' dimostrare la coerenza di un sistema di assiomi $\mathcal{SA}$ abbastanza ricco mediante metodi finitistici. Oggi, se vogliamo "dimostrare" la coerenza di un tale sistema di Assiomi si costruisce un modello di $\mathcal{SA}$ in ZFC. Poiche' abbiamo la "ragionevole" certezza che gli assiomi di ZFC siano coerenti, allora anche $\mathcal{SA}$ si considera coerente. In questo senso, si puo' dimostrare che gli assiomi che definiscono i numeri euclidei sono coerenti.

Per quanto riguarda la seconda questione e' sufficiente porsi la domanda se il numero α e' pari o dispari. I nostri assiomi non ci permettono di rispondere a questa domanda. Le conseguenze di questo fatto possono suscitare alcune perplessita' come per esempio la valutazione del numero $(-1)^\alpha$. Vediamo cosa i nostri assiomi ci permettono di dedurre riguardo al numero $x := (-1)^\alpha$: se poniamo $y = (-1)^{\alpha+1}$, si ha che

$$\begin{cases} x + y = \langle (-1)^\alpha \rangle + \langle (-1)^{\alpha+1} \rangle = \langle (-1)^\alpha + (-1)^{\alpha+1} \rangle = \langle 0 \rangle = 0 \\ x \cdot y = \langle (-1)^\alpha \rangle \cdot \langle (-1)^{\alpha+1} \rangle = \langle (-1)^\alpha \cdot (-1)^{\alpha+1} \rangle = \langle -1 \rangle = -1 \end{cases}$$

Dunque si ha che $x = 1$ o $x = -1$. Non possiamo dimostrare niente di piu'. Pertanto, l'asserzione " α e' pari" e' indipendente dagli altri assiomi e pertanto puo' essere aggiunta agli altri assiomi. Ragionando in modo analogo si puo' dimostrare che che l'enunciato

$$"\alpha \text{ e' divisibile per ogni numero intero}"$$

non e' confutabile e dunque si potrebbe aggiungere alla nostra lista di assiomi.

2.4 I numeri reali

Adesso possiamo descrivere i numeri reali come un particolare sottoinsieme della retta euclidea.

Definizione 9 *Un numero euclideo x si dice reale (o standard) se*

$$x = st(x)$$

In genere un numero reale viene pensato come un intero seguito da una virgola ed infinite cifre decimali, ad esempio

$$\sqrt{2} = 1,414213562....$$

Vediamo come questa rappresentazione e' consistente con la nostra definizione di numero reale. Prendiamo la successione

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 1 \\ \varphi(1) &= 1,4 \\ \varphi(2) &= 1,41 \\ \varphi(3) &= 1,414 \\ &\dots\end{aligned}$$

La definizione rigorosa di $\sqrt{2}$ e' data da

$$\sqrt{2} := st(\langle \varphi(n) \rangle) = st(\varphi(\alpha))$$

E' immediato verificare che $\sqrt{2}$ e' un numero reale in quanto, in virtu' della *Regola 1* del paragrafo 1.5

$$st(\sqrt{2}) = st(st(\varphi(\alpha))) = st(\varphi(\alpha)) = \sqrt{2}.$$

In questo modo si possono introdurre i radicali, π e volendo, anche il numero

$$e := st\left(\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha\right).$$

Osservazione 10 *Molto spesso, quando si vede per la prima volta il numero*

$$0,99999....$$

si pensa che sia minore di 1 ed in un certo senso cio' e' anche vero. Esaminiamo che cosa capita: prendiamo la successione associata a questo numero

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0 \\ \varphi(1) &= 0,9 \\ \varphi(2) &= 0,99 \\ \varphi(3) &= 0,999 \\ &\dots\end{aligned}$$

effettivamente si ha che $\langle \varphi(n) \rangle < 1$; ma bisogna ricordare, che, per convenzione, i puntolini indicano due cose: (1°) che la sequenza di cifre decimali continua all'infinito, (2°) che "alla fine" si prende la parte standard e, poiche' $\langle \varphi(n) \rangle$ e' infinitivamente vicino ad uno, si ha che

$$0,99999.... = 1.$$

2.5 Approfondimento sulla nozione di continuo

Nella matematica degli ultimi 150 anni, il continuo euclideo è stato identificato col continuo di Dedekind e la retta euclidea è stata identificata con l'insieme dei numeri reali (una volta che si sia fissata l'origine O ed un segmento unitario OU). Nonostante che questa identificazione, oggi, sia quasi universalmente accettata, non è (completamente) soddisfacente; infatti, esistono molte grandezze che non sono archimedee. Inoltre molti modelli fisici (e non solo) sono costruiti mediante l'uso di infinitesimi, anche se quest'ultimi vengono usati in modo euristico e, in genere, non rigoroso. Una buona teoria del continuo dovrebbe essere in grado di includere anche questi casi.

Il campo dei numeri euclidei contiene infiniti e infinitesimi; in questo paragrafo analizzeremo se esso corrisponde all'idea di "continuo" anche dal punto di vista geometrico.

Nella nostra intuizione ingenua, si pensa ad un continuo come ad un insieme linearmente ordinato senza interruzioni, ovvero senza **fori** tra una parte e l'altra. Rendiamo questa definizione rigorosa. Contrariamente alla nostra intuizione, un insieme linearmente ordinato X che soddisfa la seguente proprietà

$$\forall a, b \in X, (a < b), \exists c \in X, a < c < b \quad (4)$$

non può essere considerato un continuo: questa nozione, soddisfatta ad esempio dall'insieme dei numeri razionali, non è un buon candidato per un continuo in quanto l'insieme dei razionali è pieno di fori rappresentati dai numeri irrazionali.

Pertanto è naturale dare una definizione che generalizzi la (4) rimpiazzando a e b con due successioni a_n e b_n : questo fatto si può descrivere in modo figurato ricorrendo al principio delle scatole cinesi:

Definizione 11 (*Principio delle scatole cinesi*) *Un insieme linearmente ordinato X forma un continuo se data una successione di intervalli aperti (a_n, b_n) tali che $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subset (a_n, b_n)$, esiste $c \in X$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

$$c \in (a_n, b_n).$$

I numeri reali non soddisfano questa proprietà; per esempio, basta prendere $a_n = 0$ e $b_n = \frac{1}{n}$. Dunque tra lo zero ed i reali positivi esiste un "foro" rappresentato dagli infinitesimi positivi.

Al contrario i numeri euclidei soddisfano questa proprietà mediante il numero $c := \langle \varphi(n) \rangle$ ove

$$\varphi(n) = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

3 Funzioni reali e funzioni euclidee

Nel terzo anno si introduce la nozione di funzione reale. Pertanto è naturale estendere la nozione di funzione al mondo dei numeri Euclidei. Tale estensione risulta assai utile nello studio della geometria analitica dove si può definire la

tangente ad una curva qualsiasi senza dover ricorrere alla nozione di derivata. Poiche' in quest'anno si inizia anche lo studio della fisica, l'uso degli infinitesimi risulta assai utile nella definizione di velocita' istantanea.

3.1 Funzioni euclidee

Normalmente la gente considera funzioni a valori reali; ma avendo a disposizione la retta euclidea e' molto piu' comodo usare funzioni a valori euclidei.

Per esempio i polinomi a coefficienti reali possono essere visti come funzioni a valori reali, ma anche come funzioni a valori euclidei se la variabile x viene presa sui numeri euclidei. Lo stesso si puo' dire delle funzioni razionali.

Anche le funzioni trigonometriche, se definite geometricamente, possono essere pensate come funzioni euclidee piuttosto che come funzioni reali.

Comunque esistono funzioni euclidee che non corrispondono alle usuali funzioni reali come ad esempio le funzioni

$$x \mapsto x^\alpha \quad o \quad x \mapsto st(x) \quad (5)$$

Questo fatto puo' essere formalizzato mediante la seguente definizione:

Definizione 12 Una funzione $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ si dice normale, se

- (i) per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $f(x) \in \mathbb{R}$
- (ii) data una qualunque successione $\varphi(n)$ si ha che

$$f(\langle \varphi(n) \rangle) = \langle f(\varphi(n)) \rangle$$

La funzione x^α non e' normale in quanto non assume valori reali anche quando $x \in \mathbb{R}$; la funzione $st(x)$ non e' normale in quanto

$$st\left(\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle\right) = st\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

ma

$$\left\langle st\left(\frac{1}{n}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \frac{1}{\alpha}.$$

Data una funzione reale, esiste un facile modo per estenderla in modo normale a tutta la retta euclidea. Da un punto di vista intuitivo si puo' pensare che dato il grafico di una funzione reale esiste un modo naturale per riempire gli spazi vuoti. Adesso renderemo formale questa intuizione.

Definizione 13 Un insieme $E \subset \mathbb{E}$, si dice chiuso per successioni se data una successione $\varphi(n)$ a valori in E risulta che $\varphi(\alpha) \in E$.

Per esempio un intervallo $[a, b]$ e' un insieme chiuso per successioni. Ma esistono insiemi che non sono normali. Per esempio $\mathbb{R}$ non e' un insieme normale

in quanto la successione $\varphi(n) = \frac{1}{n}$ e' una successione a valori reali, ma $\langle \varphi(\alpha) \rangle = \frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{R}$.

Dato un insieme $A \subset \mathbb{E}$, denotiamo con $\overline{A}$ il piu' piccolo insieme chiuso per successioni contenente A .

La nozione di insieme chiuso per successioni si puo' estendere al piano euclideo $\mathbb{E}^2$.

Definizione 14 *Un insieme $E \subset \mathbb{E}^2$, si dice chiuso per successioni se data una coppia di successioni $(\varphi(n), \psi(n)) \in E$, risulta che $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) \in E$. Inoltre, dato un insieme $A \subset \mathbb{E}^2$, denotiamo con $\overline{A}$ il piu' piccolo insieme chiuso per successioni contenente A .*

A questo punto, la definizione di estensione normale di una funzione diventa naturale:

Definizione 15 *Data una funzione $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denotiamo con $\overline{h}$ la funzione il cui grafico e' l'estensione chiusa per successioni del grafico di h .²*

A questo punto e' utile distinguere due tipi di oggetti matematici.

Definizione 16 *Ogni oggetto matematico che puo' essere costruito mediante i numeri reali (ovvero i numeri standard) senza usare l'esistenza del numero α si dice standard. Altrimenti si dice non standard.*

Dunque una funzione reale e' standard, ma la sua estensione normale e' non-standard. Una circonferenza vista come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e' standard, ma vista come sottoinsieme del piano euclideo e' un insieme normale, ma non standard.

3.2 La retta tangente

Anche senza ricorrere alla nozione di derivata possiamo definire e calcolare la tangente ad una curva qualsiasi.

Definizione 17 *Data una curva normale si dice retta tangente al punto $P_0 = (x_0, y_0)$ la retta definita dalla parte standard (dei coefficienti) della retta secante P_0 ed un altro punto sulla curva, P_ε , infinitamente vicino, purché tale retta non dipenda dalla scelta P_ε . Altrimenti diremo che la tangente in P_0 non esiste. In formule si ha la retta*

$$y - y_0 = st \left(\frac{y_\varepsilon - y_0}{x_\varepsilon - x_0} \right) (x - x_0).^3 \quad (6)$$

²A questo punto si dovrebbe dimostrare che l'insieme $\overline{h}$ e' il grafico di una funzione, ma, per brevità, omettiamo la dimostrazione.

³Nella caso in cui $x_\varepsilon - x_0 = 0$, la retta tangente e' definita da

$$x - x_0 = st \left(\frac{x_\varepsilon - x_0}{y_\varepsilon - y_0} \right) (y - y_0)$$

Prendiamo la curva di equazione

$$x - y^4 = 0$$

e calcoliamo la retta secante questa curva nel punto $P_0 = (1, 1)$. Un generico punto sulla curva infinitamente vicino a P_0 e' dato da

$$P_\varepsilon := ((1 + \varepsilon)^4, 1 + \varepsilon)$$

e dunque la (6) diventa

$$\begin{aligned} y - 1 &= st \left(\frac{(1 + \varepsilon) - 1}{(1 + \varepsilon)^4 - 1} \right) (x - 1) = st \left(\frac{\varepsilon}{4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4} \right) (x - 1) \\ &= st \left(\frac{1}{4 + 6\varepsilon + 4\varepsilon^2 + \varepsilon^3} \right) (x - 1) = \frac{1}{4}(x - 1) \end{aligned}$$

La retta $y = 1 + \frac{1}{4}(x - 1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x$ puo' essere pensata come retta standard, ovvero come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ o come retta normale, ovvero come sottoinsieme del piano euclideo.

La curva di equazione

$$|x| - y = 0$$

non ha la tangente nel punto $P_0 = (0, 0)$ in quanto, prendendo

$$P_\varepsilon := (\varepsilon, |\varepsilon|)$$

si ha che

$$y = st \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon} \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon > 0 \\ 0 & \text{se } \varepsilon < 0 \end{cases}$$

Dunque in questo caso la retta tangente non esiste, come del resto risulta evidente dal grafico.

3.3 La nozione di velocita' istantanea

Nel terzo anno del liceo si inizia lo studio della fisica e si introduce la nozione di velocita' istantanea. L'uso degli infinitesimi permette di definire la velocita' istantanea senza introdurre esplicitamente la nozione di derivata. Questa definizione non corrisponde a quella usuale, ma e' piu' semplice, piu' generale, e piu' coerente con il senso fisico.

Definizione 18 *La velocita' istantanea in un punto standard t_0 e' la parte standard della velocita' media nell'intervallo infinitesimo $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$; in formule, se $s = s(t)$ e' l'equazione oraria di un punto materiale, si ha che*

$$v(t_0) = st \left(\frac{s(t_0 + \eta) - s(t_0 - \eta)}{2\eta} \right)$$

Vediamo alcuni esempi: lo spazio percorso da un grave in caduta libera e' dato dall'equazione

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{ove } g \cong 9,6 \text{ \{metri\}/\{secondo\}}^2$$

pertanto la velocita' in un punto standard t_0 e' data da

$$\begin{aligned} v(t_0) &= st \left(\frac{\frac{1}{2}g(t_0 + \eta)^2 - \frac{1}{2}g(t_0 - \eta)^2}{2\eta} \right) = \frac{1}{2}g \cdot st \left(\frac{(t_0 + \eta)^2 - (t_0 - \eta)^2}{2\eta} \right) \\ &= \frac{1}{2}g \cdot st \left(\frac{4\eta t_0}{2\eta} \right) = \frac{1}{2}g \cdot st(2t_0) = gt_0. \end{aligned}$$

Ovviamente, la velocita' istantanea, puo' essere definita anche nei punti non standard prendendo l'estensione normale della funzione $v(t)$.

Si consideri la seguente equazione oraria

$$s(t) = 2t + |t|$$

anche in questo caso e' facile calcolare la velocita' istantanea; vediamo cosa capita nel punto $t_0 = 0$:

$$v(0) = st \left(\frac{(2\eta + |\eta|) - (-2\eta + |-\eta|)}{2\eta} \right) = st \left(\frac{4\eta + |\eta| - |\eta|}{2\eta} \right) = 2$$

Dunque si ha che

$$v(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t < 0 \\ 2 & \text{se } t = 0 \\ 3 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

La velocita' istantanea puo' essere definita anche nel caso di "teletrasporto", anche se questo fenomeno capita solo nella fantasia (e, sembra, nella meccanica quantistica). Per esempio se un oggetto si trova nel punto $-s_0$ per $t < 0$ e nel punto s_0 per $t \geq 0$, la sua equazione oraria e' data da

$$s(t) = s_0 \frac{t}{|t|}$$

e si ha che

$$v(0) = st \left(\frac{s_0 \frac{\eta}{|\eta|} - s_0 \frac{-\eta}{|-\eta|}}{2\eta} \right) = s_0 st \left(\frac{2 \frac{\eta}{|\eta|}}{2\eta} \right) = s_0 st \left(\frac{1}{|\eta|} \right) = +\infty.$$

Se il grafico dell'equazione oraria, $s = s(t)$, viene riportato nel piano e se, nel punto $(t_0, s(t_0))$, tale grafico ha la retta tangente, allora la velocita' istantanea e' uguale al coefficiente angolare della retta tangente. Questo fatto sara' approfondito in seguito quando studieremo la nozione di derivata.

Osservazione 19 *Il fatto che nella definizione di una grandezza fisica si debba prendere la parte standard ha una "ragionevole spiegazione" epistemologica. Infatti, il risultato della misura di una grandezza e' necessariamente un numero decimale finito la cui accuratezza dipende dallo strumento di misura; ma poiche', non conosciamo a priori l'accuratezza dello strumento, per astrazione, supponiamo che il risultato sia un numero reale.*

3.4 Calcolo dell'angolo di contingenza

Vediamo adesso un fatto che non e' rilevante per gli sviluppi della matematica, ma e' un esercizio istruttivo dal punto di vista tecnico ed epistemologico e si inquadra nell'ambito dello studio della trigonometria.

Esercizio 20 *Trovare una formula che permetta di misurare l'angolo di contingenza formato da una retta tangente ad una circonferenza di raggio r .*

Data la semiretta $y = kx$, ($k, x \geq 0$), l'angolo θ che questa semiretta forma con l'asse delle x e' dato da

$$\theta = \arcsin\left(\frac{y_0}{R}\right) \quad (7)$$

ove (x_0, y_0) e' il punto in cui la semiretta interseca una circonferenza di raggio R , ovvero e' la soluzione del seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = kx \\ x^2 + y^2 = R^2 \\ x \geq 0 \end{cases} ;$$

la soluzione di questo sistema e' data da

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{R}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{kR}{\sqrt{1+k^2}} \right)$$

per cui si ha

$$\theta = \arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Adesso vogliamo estendere questa procedura agli angoli di contingenza, pero' abbiamo un problema: il punto (x_0, y_0) in cui la circonferenza di raggio r interseca la circonferenza di raggio R , dipende da R ed in questo caso anche il rapporto y_0/R dipende da R . Quindi dobbiamo scegliere R in modo che la misura dell'angolo sia coerente con la nostra intuizione. In genere si pensa ad un angolo come ad un entita' che vive vicino all'origine, pertanto e' naturale prendere il raggio R infinitesimo. Fortunatamente abbiamo l'infinitesimo fondamentale η che ci permette di scegliere R in modo univoco e dunque applicare la (7) con $R = \eta$. In questo modo, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + (y-r)^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 = \eta^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

che ha la soluzione

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\eta}{2r} \sqrt{4r^2 - \eta^2}, \frac{\eta^2}{2r} \right)$$

per cui

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\frac{\eta^2}{2r}}{\eta}\right) = \arcsin\left(\frac{\eta}{2r}\right) = \frac{1}{2} \frac{\eta}{r} + \varepsilon \left(\frac{\eta}{r}\right)^2.$$

4 La funzione esponenziale

Nel quarto anno, i programmi ministeriali prevedono argomenti per i quali l'uso degli infinitesimi ha un ruolo limitato. Fa eccezione il calcolo delle probabilit , ma in questo articolo tralascero' questo argomento⁴ del quale non ho alcuna esperienza didattica e mi limitero' ad applicare le tecniche non-standard alla definizione della funzione esponenziale.

4.1 Definizione

L'esponenziale   una funzione che trasforma la somma in un prodotto, ovvero soddisfa l'equazione

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

Vediamo come si costruisce. Sappiamo che se $q = \frac{p}{m} \in \mathbb{Q}$, si ha che, per ogni numero reale $a > 0$,

$$a^q = a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p} = (\sqrt[m]{a})^p$$

In particolare, se $\mathbb{D}$   la retta empirica, ovvero l'insieme dei decimali finiti, la funzione

$$q \mapsto a^q$$

  ben definita su $\mathbb{D}$ e soddisfa la relazione

$$a^{p+q} = a^p \cdot a^q. \quad (8)$$

Possiamo estendere a^q da $\mathbb{D}$ a tutto $\mathbb{R}$ nel seguente modo:

Definizione 21 *Dato un numero reale $a > 0$, si chiama funzione esponenziale di base a la funzione*

$$a^x := st \left(\left\langle a^{\varphi_x(n)} \right\rangle \right)$$

ove $\varphi_x(n)$   il numero determinato dai primi n termini dell'espansione decimale del numero reale x .

La proprieta' (8) si estende facilmente alla funzione esponenziale, infatti

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= st \left(\left\langle a^{\varphi_x(n)+\varphi_y(n)} \right\rangle \right) = st \left(\left\langle a^{\varphi_x(n)} \cdot a^{\varphi_y(n)} \right\rangle \right) \\ &= st \left(\left\langle a^{\varphi_x(n)} \right\rangle \cdot \left\langle a^{\varphi_y(n)} \right\rangle \right) = st \left(\left\langle a^{\varphi_x(n)} \right\rangle \right) \cdot st \left(\left\langle a^{\varphi_y(n)} \right\rangle \right) = a^x \cdot a^y. \end{aligned}$$

La funzione esponenziale si puo' estendere in modo normale a tutto $\mathbb{R}$ e, ovviamente, sara' denotata con lo stesso simbolo a^x .

⁴Chiunque voglia cimentarsi in questo compito puo' trarre ispirazione da [2] e da [4].

4.2 Il numero di Nepero

Adesso ci poniamo il seguente problema: esiste un numero reale e tale che il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto e^x sia esattamente e^x . Ovvero, scritto in formule il problema consiste nel trovare un numero e tale che

$$e^x = st \left(\frac{e^{x+\eta} - e^x}{\eta} \right)$$

In primo luogo osserviamo che

$$e^x = st \left(\frac{e^x e^\eta - e^x}{\eta} \right) = st \left(e^x \cdot \frac{e^\eta - 1}{\eta} \right) = e^x \cdot st \left(\frac{e^\eta - 1}{\eta} \right)$$

Dunque, dividendo per e^x , il problema si riduce a trovare un numero e tale che

$$st \left(\frac{e^\eta - 1}{\eta} \right) = 1$$

ovvero,

$$\frac{e^\eta - 1}{\eta} \sim 1$$

per cui

$$e^\eta - 1 \sim \eta$$

Dunque abbiamo che

$$e^\eta \sim 1 + \eta$$

ed elevando i due membri all' α -esima potenza, possiamo dedurre⁵ che

$$(e^\eta)^\alpha \sim (1 + \eta)^\alpha$$

ma $(e^\eta)^\alpha = (\sqrt[\alpha]{e})^\alpha = e$, per cui $e \sim (1 + \eta)^\alpha$ dunque

$$e = st((1 + \eta)^\alpha)$$

Questo numero viene chiamato costante di Nepero o talvolta numero di Eulero.

5 Il calcolo infinitesimale

Nell'ultimo anno si studia il calcolo differenziale che e' la materia da cui storicamente sono nati gli infinitesimi e dove la matematica non-archimedeica si rivela particolarmente utile ed interessante.

Utilizzando i numeri infinitesimi ed infiniti, le nozioni fondamentale del calcolo, ovvero *continuita'*, *derivate*, *integrali* e *serie*, possono essere definiti in modo piu' semplice, ma anche **piu' generale**. Ovvero, nel senso che vedremo, definiremo derivate, integrali e serie per ogni funzione (o successione) e molte delle proprieta' usuali si trasferiscono a queste generalizzazioni.

⁵Questo passaggio e' abbastanza delicato e necessiterebbe una dimostrazione che pero' omettiamo.

5.1 Limiti

Se sviluppiamo la matematica usando metodi non-standard, la nozione di limite diventa superflua, in quanto derivate, integrali e serie vengono definiti senza questo strumento ausiliario. In ogni caso, per completezza diamo la definizione di limite.

Definizione 22 *Porremo*

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

se per ogni $x \sim x_0$,

$$st(x) = L.$$

In modo analogo possiamo definire il limite anche per funzioni (o successioni) per $x \rightarrow \pm\infty$.

Definizione 23 *Porremo*

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

se per ogni $x \in Inf^+$,

$$st(x) = L$$

ove l'insieme Inf^+ e' l'insieme dei numeri infiniti positivi. Similmente si definisce il limite per $x \rightarrow -\infty$.

5.2 Insiemi iperfiniti

Uno strumento molto utile per il calcolo differenziale sono gli insiemi iperfiniti.

Definizione 24 *Data una successione di insiemi finiti F_n , l'insieme F formato dai numeri della forma*

$$\xi = \langle \psi(n) \rangle, \text{ con } \psi(n) \in F_n$$

si dice iperfinito.

Per esempio, l'insieme $\mathbb{N}_\alpha$ formato da numeri della forma $\xi = \langle \varphi(n) \rangle$, con

$$\varphi(n) \in F_n := \{1, \dots, n\} \tag{9}$$

e' iperfinito. L'importanza degli insiemi iperfiniti sta nel fatto che, anche quando hanno infiniti elementi, essi godono di molte proprieta' degli insiemi finiti. Per esempio un insieme iperfinito ha sempre il massimo ed il minimo dati da

$$\xi_M = \langle \psi_M(n) \rangle \quad e \quad \xi_m = \langle \psi_m(n) \rangle$$

ove

$$\psi_M(n) := \max\{F_n\}; \quad \psi_m(n) := \min\{F_n\};$$

Un'altra importante caratteristica degli insiemi iperfiniti sta nel fatto che i loro elementi, anche se sono infiniti, possono essere sommati; infatti, se F e' un insieme iperfinito relativo alla successione di insiemi F_n , basta porre

$$\sum_{k \in F} f(k) = \langle S(\alpha) \rangle$$

ove

$$S(n) = \sum_{k \in F_n} f(k).$$

Per esempio, se $\mathbb{N}_\alpha$ e' l'insieme definito da (9) si ha che

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_\alpha} k = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$$

in quanto

$$S(n) = \sum_{k \in F_n} k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tra gli insiemi iperfiniti ce n'e' uno che ricopre una notevole importanza in molte applicazioni: la griglia iperfinita.

Definizione 25 *Si chiama griglia iperfinita l'insieme $\mathbb{H}$ formato dai numeri della forma*

$$\xi = \langle \psi(n) \rangle,$$

ove

$$\psi(n) \in \mathbb{H}_n := \left\{ \frac{-n^2}{n}, \frac{-n^2+1}{n}, \dots, \frac{-1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n^2-1}{n}, \frac{n^2}{n} \right\}$$

Se $\xi \in \mathbb{H}$ si ha che

$$\xi = \zeta \eta$$

ove $|\xi| \leq \alpha$ e

$$p \in \mathbb{Z}^* := \{ \langle \varphi(n) \rangle \mid \varphi(n) \in \mathbb{Z} \}. \quad (10)$$

Una delle proprieta' piu' importanti della griglia iperfinita sta nel fatto che infinitamente vicino ad ogni numero reale ci sono sempre alcuni elementi della griglia. Infatti preso un numero reale x , se prendiamo p_x

$$p_x = \langle \psi_x(n) \rangle \quad \text{ove} \quad \psi_x(n) = \max \left\{ z \in \mathbb{Z} \mid \frac{z}{n} \leq x \right\}$$

risulta che

$$p_x \eta \sim x.$$

5.3 Continuità'

Iniziamo col definire la continuità di una funzione in un punto; in quanto segue D denoterà un qualsiasi sottoinsieme normale di $\mathbb{E}$.

Definizione 26 Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{E}$ si dice continua in un punto standard $x \in A$ se

$$\xi \sim x \Rightarrow f(\xi) \sim f(x)$$

Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{E}$ si dice continua se e' normale ed e' continua in ogni punto di D .

Si verifica facilmente che f e' continua in un intervallo normale chiuso se e solo se per ogni $x \in [a, b]$

$$st(f(x)) = f(st(x))$$

5.3.1 Il teorema di Weierstrass

Tra i vari teoremi sulle funzioni continue, ci limiteremo al teorema di Weierstrass.

Teorema 27 (di Weierstrass) Una funzione continua

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$$

definita su un intervallo chiuso e limitato ha massimo e minimo.

Dimostrazione. Poniamo

$$F := [a, b] \cap \mathbb{H}$$

Denotiamo con $\bar{x}$ il punto di massimo in F ; il massimo esiste in quanto F è un insieme iperfinito. Si ponga

$$x_0 = st(\bar{x})$$

Poiche' $[a, b]$ e' un intervallo chiuso, $x_0 \in [a, b]$. Vogliamo dimostrare che x_0 è proprio il punto di massimo. Per fare ciò prendiamo un qualunque punto $y \in [a, b] \cap \mathbb{R}$; dobbiamo provare che

$$f(x_0) \geq f(y)$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\bar{y} \in \mathbb{H}$ un punto infinitamente vicino a y ; dunque

$$f(\bar{x}) \geq f(\bar{y})$$

Prendendo la parte standard dei due membri si ha che

$$st(f(\bar{x})) \geq st(f(\bar{y}))$$

e sfruttando la continuità' di f

$$f(x_0) = f(st(x)) = st(f(\bar{x})) \geq st(f(\bar{y})) = f(st(\bar{y})) = f(y).$$

Dunque per ogni $y \in f([a, b] \cap \mathbb{R})$, $f(x_0) \geq y$, e pertanto, per ogni

$$y \in f([a, b]) = \overline{f([a, b] \cap \mathbb{R})},$$

si ha che $f(x_0) \geq y$.

□

5.4 Derivate

In questo paragrafo introdurremo la nozione di derivata, che però non coincide con l'usuale nozione e pertanto sarebbe più opportuno chiamarla α -derivata (o derivata generalizzata). E' molto più generale dell'usuale definizione in quanto ci sono funzioni discontinue α -derivabili. La cosa sorprendente sta nel fatto che, se ristretta alle funzioni continue anche l' α -derivata soddisfa i principali teoremi del calcolo quali, ad esempio, il teorema di Lagrange ed il teorema fondamentale del calcolo.

Definizione 28 Data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}$, ed un punto standard $x_0 \in (a, b)$, si pone

$$D^+ f(x_0) = st \left(\frac{f(x_0 + \eta) - f(x_0)}{\eta} \right)$$

L'elemento $D^+ f(x_0) \in \mathbb{R}$ si chiama **derivata destra** della f nel punto x_0 .

$$D^- f(x_0) = st \left(\frac{f(x_0) - f(x_0 - \eta)}{\eta} \right)$$

L'elemento $D^- f(x_0) \in \mathbb{R}$ si chiama **derivata sinistra** della f nel punto x_0 .

$$D_M f(x_0) = st \left(\frac{f(x_0 + \eta) - f(x_0 - \eta)}{2\eta} \right) \quad (11)$$

L'elemento $D_M f(x_0) \in \mathbb{R}$ si chiama **derivata media** della f nel punto x_0 . Se

$$Df(x_0) = D^+ f(x_0) \in \mathbb{R},$$

allora $Df(x_0)$ si chiama derivata nel punto x_0 ed f si dice **derivabile** nel punto x_0 .

Con questa definizione, si ha che, assumendo i valori $\pm\infty$, ogni funzione ha la derivata destra e sinistra in ogni punto. Inoltre, ogni funzione ha anche la derivata media. Si osservi che quest'ultima coincide con nozione di velocità istantanea definita nel paragrafo 3.3.

Se f è derivabile, allora

$$Df(x_0) = D^+ f(x_0) = D^- f(x_0) = D_M f(x_0).$$

Osservazione 29 Con questa definizione risultano derivabili anche funzioni discontinue molto patologiche. Si consideri ad esempio la funzione di Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ e' razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ e' irrazionale} \end{cases}$$

Se x_0 e' razionale si ha che anche $x_0 \pm \frac{1}{n}$ e' razionale e dunque

$$f(x_0 \pm \eta) = \left\langle f\left(x_0 \pm \frac{1}{n}\right) \right\rangle = 1$$

Pertanto

$$D^+ f(x_0) = D^- f(x_0) = 0.$$

5.4.1 Il teorema di Lagrange

In questo paragrafo mostreremo che il teorema di Lagrange rimane valido anche usando la nozione di α -derivata. Questo fatto e' abbastanza irrilevante dal punto di vista delle applicazioni, ma e' notevole per i fondamenti del calcolo differenziale. Come e' noto, il teorema di Lagrange si basa sui teoremi di Weierstrass, Fermat e Rolle. Usando la nozione di derivata data dalla Def. 28, le dimostrazioni procedono essenzialmente nello stesso modo. Vediamo ad esempio la dimostrazione del teorema di Fermat:

Teorema 30 (Teorema di Fermat) Sia data una funzione derivabile in x_0

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Allora, se x_0 e' un punto di massimo o di minimo locale per f , si ha che

$$Df(x_0) = 0.$$

Dim. Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo locale per f . Allora,

$$f(x_0) \leq f(x_0 + \eta) \text{ e } f(x_0) \leq f(x_0 - \eta).$$

Dunque,

$$D^+ f(x_0) = st \left(\frac{f(x_0 + \eta) - f(x_0)}{\eta} \right) \geq 0$$

e

$$D^- f(x_0) = st \left(\frac{f(x_0) - f(x_0 - \eta)}{\eta} \right) \leq 0$$

Poiche' abbiamo assunto che f sia derivabile, si ha che $Df(x_0) = D^+ f(x_0) = D^- f(x_0)$ da cui la tesi. Nel caso in cui x_0 sia un punto di massimo locale si ragiona in modo analogo.

□

Da qui, assumendo che la funzione sia anche continua, segue il Teorema di Rolle e con la dimostrazione usuale, si prova il teorema di Lagrange.

Teorema 31 (Teorema di Lagrange o del valor medio). Sia data una funzione continua

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

e derivabile in tutti i punti dell'intervallo aperto (a, b) . Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

5.5 Il differenziale

Vediamo adesso la nozione di differenziale:

Definizione 32 Una funzione (normale) si dice differenziabile in un punto $x \in \mathbb{R}$ se per ogni infinitesimo ε , esiste un numero $df(x) \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + df(x)\varepsilon + \theta_\varepsilon\varepsilon \quad (12)$$

ove θ_ε è un infinitesimo (che può dipendere da ε).

Proposizione 33 Una funzione è differenziabile in un punto standard x_0 se e soltanto se il valore

$$st \left[\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \right] \quad (13)$$

non dipende da ε ed è finito.

Dim: Supponiamo che f sia differenziabile, allora

$$st \left(\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \right) = st \left(\frac{f(x_0) + df(x_0)\varepsilon + \theta_\varepsilon\varepsilon - f(x_0)}{\varepsilon} \right) = df(x)$$

e dunque (13) non dipende da ε ed è finito.

Viceversa se $df(x)$ non dipende da ε , esiste un numero reale L ed un infinitesimo θ tali che

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} = L + \theta$$

e dunque la (12) è soddisfatta con $df(x) = L$ e $\theta_\varepsilon = \theta$.

□

Dunque una funzione è differenziabile se e soltanto se il suo grafico ha la retta tangente. Di conseguenza, la nozione di differenziale qui presentata coincide con la definizione usuale.

La proposizione seguente mostra che il differenziale e derivata presentano lo stesso legame che nella matematica usuale si ha per funzioni di più variabili.:

Proposizione 34 Se una funzione è differenziabile in un punto standard x_0 , allora è derivabile e si ha

$$Df(x_0) = df(x_0)$$

Dim. Si ha che

$$\begin{aligned}
D^+ f(x_0) &= st \left(\frac{f(x_0 + \eta) - f(x_0)}{\eta} \right) \\
&= st \left(\frac{[f(x_0) + df(x_0)\eta + \theta_\eta \eta] - f(x_0)}{\eta} \right) \\
&= st \left(\frac{df(x_0)\eta + \theta_\eta \eta}{\eta} \right) = st(df(x_0) + \theta_\eta \eta) = df(x_0)
\end{aligned}$$

e similmente

$$D^- f(x_0) = df(x_0)$$

□

Se una funzione e' derivabile in ogni punto standard di un intervallo (a, b) , l'estensione normale della funzione

$$Df : (a, b) \cap \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

si chiama funzione derivata ed usualmente e' denotata da $f'(x)$.

5.6 Integrali

La nozione di somma iperfinita permette di definire l'integrale nel seguente modo:

Definizione 35 Si chiama integrale di una funzione normale $f : D \rightarrow \mathbb{E}$, il numero

$$\int_a^b f(x) dx := st \left(\eta \sum_{k \in D \cap \mathbb{H}} f(k) \right)$$

Se vogliamo calcolare esplicitamente l'integrale esteso ad un intervallo $[a, b]$, puo' essere conveniente scrivere $[a, b] \cap \mathbb{H}$ nel seguente modo:

$$[a, b] \cap \mathbb{H} = \left\{ p\eta \mid p \in \mathbb{Z}^* \text{ and } a \leq \frac{p}{\alpha} \leq b \right\}$$

ove $\mathbb{Z}^*$ e' stato definito dalla (10). Dunque

$$\sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} f(k) = \sum_{p \in [\alpha a, \alpha b] \cap \mathbb{Z}_\alpha} f(p\eta)$$

Per esempio, si ha che

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x dx &= st \left(\eta \sum_{k \in [0, 1] \cap \mathbb{H}} k \right) = st \left(\eta \sum_{p \in [0, \alpha] \cap \mathbb{Z}_\alpha} (p\eta) \right) \\
&= st \left(\eta^2 \sum_{p \in \mathbb{N}_\alpha} p \right) = st \left(\eta^2 \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} \right) \\
&= st \left(\frac{\eta^2 \alpha^2 + \eta^2 \alpha}{2} \right) = st \left(\frac{1 + \eta}{2} \right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

In virtu' della definizione 35, le proprieta' fondamentali dell'integrale di dimostrano con estrema facilità'.

Osservazione 36 *Poiche' con questa definizione, tutte le funzioni sono integrabili, la seguente domanda sorge in modo naturale: quale proprieta' distingue le funzioni integrabili secondo Riemann? La risposta e' semplice: l'integrale di Riemann e' invariante per traslazioni, ovvero se f e' Riemann-integrabile in $[a, b]$ allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+t}^{b+t} f(x+t) dx.$$

Questa proprieta' non e' soddisfatta dall'" α -integrale" per funzioni abbastanza "brutte".

Osservazione 37 *Con un piccolo sforzo in piu' si potrebbe definire anche l'integrale di Lebesgue. Per fare cio' dobbiamo prendere un insieme piu' sottile della griglia iperfinita $\mathbb{H}$, ovvero un insieme iperfinito $\mathbb{K}$ contenente tutti i numeri reali e porre*

$$\int_a^b f(x) dx = st \left(\sum_{x \in [a, b] \cap \mathbb{K}} f(x)(x^+ - x) \right) \quad (14)$$

ove

$$x^+ = \begin{cases} \min \{y \in [a, b] \cap \mathbb{K} \mid y > x\} & \text{se } [a, b] \cap \mathbb{K} \neq \emptyset \\ b & \text{se } [a, b] \cap \mathbb{K} = \emptyset \end{cases}$$

In realta' l'esistenza dell'insieme $\mathbb{K}$, per essendo una richiesta consistente con i nostri assiomi, non puo' essere dimostrata solo con questi (vedi osservazione 2.3).

5.6.1 Il teorema fondamentale del calcolo

E' interessante vedere che il teorema fondamentale del calcolo vale anche per le funzioni α -derivabili: non c'e' bisogno della differenziabilita'.

Teorema 38 *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ e' una funzione derivabile e continua in b allora:*

$$\int_a^b Df(x) dx = f(b) - f(a).$$

Dim. Basta eseguire un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= st \left[\eta \sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} Df(k) \right] = st \left[\eta \sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} \left(\frac{f(k+\eta) - f(k)}{\eta} + \varepsilon_k \right) \right] \\ &= st \left[\sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} f(k+\eta) - \sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} f(k) + \sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} \eta \varepsilon_k \right] \end{aligned}$$

Il terzo termine e' infinitesimo in quanto

$$\left| \sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} \eta \varepsilon_k \right| \leq \max_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} |\varepsilon_k| \cdot \sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} \eta \leq \varepsilon_M \cdot ([a, b] + \eta) \sim 0$$

Dunque,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= st \left[\sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} f(k + \eta) - \sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} f(k) \right] \\ &= st \left[\sum_{k \in [a + \eta, b + \eta] \cap \mathbb{H}} f(k) - \sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} f(k) \right] \\ &= st \left[-f(a) + f(b + \eta) + \sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} f(k) - \sum_{k \in [a, b] \cap \mathbb{H}} f(k) \right] \\ &= st [f(b + \eta) - f(a)] = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

□

5.6.2 Il teorema della primitiva

Il teorema della primitiva diventa molto semplice:

Problema: Data una funzione continua f , trovare una funzione F , tale che

$$DF(t) = f(t)$$

La soluzione e molto semplice: integrando i due membri tra a ed x si ha che

$$\int_a^x DF(t) dt = \int_a^x f(t) dt$$

e dunque

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$$

per cui

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt.$$

5.7 Serie

Per serie si intende una espressione del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

ove $\{a_k\}$ è una qualunque successione di numeri euclidei.

Definizione 39 Si dice somma della serie il numero (o i valori $\pm\infty$)

$$S := st \left[\sum_{k \in \mathbb{N}_\alpha} a_k \right]$$

Se $S \in \mathbb{R}$ si dice che la serie converge ad S . Se $S = \pm\infty$, si dice che la serie e' divergente.

Anche in questo caso si ha che tutte le serie assumono un valore: le serie indeterminate non esistono. Naturalmente solo le serie assolutamente convergenti godono delle usuali buone proprieta' (proprieta' associativa, proprieta' commutativa, etc.).

6 Considerazioni conclusive

Una delle maggiori difficolta' nella diffusione dell'ANS sta nel fatto che si vuole ricondurre concetti legati alla nozione di infinito nell'alveo della matematica usuale. Basta pensare alla nozione di velocita' istantanea, di somma di una serie etc. Tutti questi concetti non hanno bisogno della nozione di limite. Se possiamo attraverso il concetto di limite, queste nozioni diventano inutilmente complicate. Un altro esempio viene dato dall'integrale di Lebesgue. La sua definizione fornita dalla (14) e' relativamente semplice. La cosa difficile sta nel dimostrare che questa definizione coincide con quella di Lebesgue quando viene applicata alle funzioni integrabili secondo Lebesgue. La difficolta' non nasce dalla definizione (14), ma dalla definizione tradizionale dell'integrale di Lebesgue che, non potendo sfruttare gli infinitesimi, diventa molto sottile e l'equivalenza delle due definizioni e' ancora piu' delicata.

References

- [1] Benci V. *Un possibile percorso didattico: dalle numerosità ai numeri euclidei*, Atti del convegno: VIII giornata nazionale di Analisi Nonstandard, (P. Bonavoglia ed.), (2019), p. 21-33, ISBN: 1220064475
- [2] Benci V., Freguglia P. *Alcune osservazioni sulla matematica non archimedeana*, Matem. Cultura e Soc., RUMI, 1 (2016), pp.105–122.
- [3] Benci V., Freguglia P. *La matematica e l'infinito*, Carocci, (2019), ISBN: 8843095250.
- [4] Benci V., Horsten H., Wenmackers S., "Non-Archimedean probability", in *Milan J. Math.*, (2012).
- [5] Bontivoglia P. *Il calcolo infinitesimale. Analisi per i licei alla maniera non standard*, Universal Book, (2011), ISBN 9788896354131

- [6] Wenmackers, S. *1, 2, 3...Infinity!* YouTube,
<https://www.youtube.com/watch?v=QJuuKQBhenY&t=144s>
- [7] Zambelli D. et al. *Matematica C3, Matematica dolce 1,...,5*, Matematicamente.it. (2019). ISBN: 9788899988005.